Contrôle continu 2011 - correction

Ex. 1| $xy' + 3y = x^3 \quad (*)$

équation homogène associée :

$$xy' + 3y = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{3}{x} \Rightarrow \ln y = -3\ln x + \text{const}$$

donc la solution correspondante est

$$y_{hom}(x) = \frac{C}{x^3}$$

En utilisant la variation de la constante, on cherche la solution de $(*)$ comme

$$y(x) = C(x)/x^3$$

Alors $(*)$ devient

$$x\left(\frac{C'}{x^3} - 3\cancel{\frac{C}{x^4}}\right) + \cancel{3\frac{C}{x^3}} = x^3$$

$$\Leftrightarrow \quad C'/x^2 = x^3 \Rightarrow C' = x^5, \quad C(x) = \frac{x^6}{6} + D$$

d'où

$$y(x) = \frac{D + \frac{x^6}{6}}{x^3} = \frac{D}{x^3} + \frac{x^3}{6}$$

Condition initiale

$$y(1) = D + \frac{1}{6} = 1 \Rightarrow D = \frac{5}{6}$$

et donc la solution recherchée est donnée par

$$y(x) = \frac{5}{6x^3} + \frac{x^3}{6}.$$

Ex. 2|

$$x\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = S A_d S^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Notons $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = S^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, alors $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ vérifie

$$x\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = A_d\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 z_1 \\ \lambda_2 z_2 \end{pmatrix},$$

où λ_1, λ_2 notent les valeurs propres de A. Le système se décompose en 2 équations indépendantes:

$$x z_1' = \lambda_1 z_1 \Rightarrow \frac{z_1'}{z_1} = \frac{\lambda_1}{x} \Rightarrow \ln z_1 = \lambda_1 \ln x + \text{const}$$

$$\Downarrow$$

$$z_1(x) = C x^{\lambda_1}!$$

De façon analogue, $z_2(x) = D\,x^{\lambda_2}$, et donc

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} C\,x^{\lambda_1} \\ D\,x^{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

Ici: S est la transformation diagonalisante, C, D sont 2 constantes d'intégration.

Soit $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{5} - \lambda & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} - \lambda \end{pmatrix}$

$$= \left(\frac{1}{5} - \lambda\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

donc $\lambda_1 = \frac{3}{5}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{5}$.

Vecteurs propres:

- pour λ_1:

$$\frac{1}{\cancel{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{3}{\cancel{5}}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \alpha + 2\beta = 3\alpha \Rightarrow \alpha = \beta$$

- pour λ_2:

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \alpha + 2\beta = -\alpha \Rightarrow \alpha = -\beta$$

La transformation diagonalisante est alors

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et la solution général du système devient

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\,x^{\lambda_1} \\ D\,x^{\lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\,x^{3/5} \\ D\,x^{-1/5} \end{pmatrix}$$

Les conditions initiales

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(x=1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\,x^{3/5} \\ -x^{-1/5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3x^{3/5} - x^{-1/5}}{2} \\ \frac{3x^{3/5} + x^{-1/5}}{2} \end{pmatrix}$$

Ex.3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc $A^n = 0 \quad \forall n \geqslant 3$. Par conséquent,

$$e^{tA} = \mathbb{1} + tA + t^2\frac{A^2}{2!} + \underbrace{\frac{t^3A^3}{3!} + \cdots}_{=\,0} =$$

$$= \mathbb{1} + tA + t^2\frac{A^2}{2!} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & t & t + t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ex.4

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1) y = 0 \qquad (*)$$

Soit $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2$

$$W'(y_1, y_2) = y_1 y_2'' + \cancel{y_1' y_2'} - \cancel{y_1' y_2'} - y_1'' y_2 = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 =$$

$$= y_1\left(-x y_2' - \cancel{(x^2-1) y_2}\right)/x^2 - \left(-x y_1' - \cancel{(x^2-1) y_1}\right)/x^2 \, y_2 =$$

$$= -\frac{y_1 y_2'}{x} + \frac{y_1' y_2}{x} = -\frac{W(y_1, y_2)}{x}$$

$$\frac{W'}{W} = -\frac{1}{x} \Rightarrow \ln W = -\ln x + \text{const}$$

et donc

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \frac{C}{x} \qquad \forall\, y_1, y_2 \text{ vérifiant } (*)$$

D'autre part, pour nos conditions initiales

$$\underbrace{\Big[W(y_1(x), y_2(x))\Big]_{x=1}}_{=\,\frac{C}{1}} = y_1(1)\, y_2'(1) - y_1'(1)\, y_2(1) = ad - bc$$

donc $C = ad - bc$ et $W(y_1(x), y_2(x)) = \dfrac{ad - bc}{x}$.

Ex. 5

$$I = \int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+5)}$$

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+5)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+5} = \frac{A(x+5) + B(x-1)(x+5) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+5)} =$$

$$= \frac{(B+C)x^2 + (A+4B-2C)x + (5A-5B+C)}{(x-1)^2(x+5)}$$

d'où le système

$$\begin{cases} B+C=0 & \Rightarrow \quad B=-C \\ A+4B-2C=1 & \quad\quad \Downarrow \\ 5A-5B+C=0 & \Rightarrow \quad 5A+6C=0 \Rightarrow A=-\frac{6}{5}C \end{cases}$$

donc $-\frac{6}{5}C - 4C - 2C = 1 \Rightarrow -\frac{36}{5}C = 1 \Rightarrow C = -B = -\frac{5}{36}$

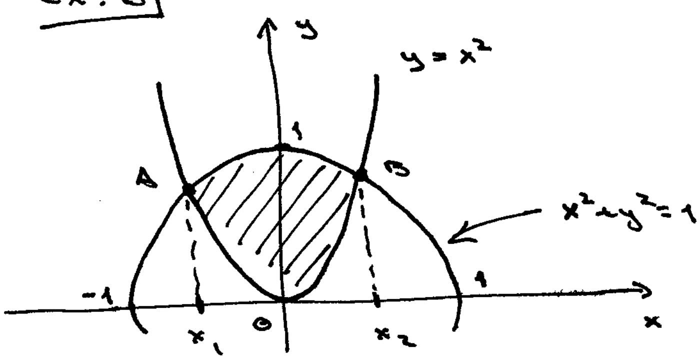
$A = +\frac{1}{6}$

Par conséquent

$$I = \int \left(+\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{5}{36}\,\frac{1}{x-1} - \frac{5}{36}\,\frac{1}{x+5} \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{5}{36} \ln \frac{x-1}{x+5} + \text{const.}$$

Ex. 6



Points d'intersection:

$x^2 + x^4 = 1$

Notons $x^2 = s$

$s^2 + s - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 4 = (\sqrt{5})^2$

$s = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

1 racine est négative $\Rightarrow$ exclue

$x_1 = -\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{1/2}, \quad x_2 = +\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{1/2}$

$$\iint_D (x+y)\,dS = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{x^2}^{\sqrt{1-x^2}} (x+y)\,dy \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left(x\left(\sqrt{1-x^2} - x^2\right) + \frac{1-x^2-x^4}{2} \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(x\sqrt{1-x^2} + \frac{1-x^2-x^4}{2} - x^3 \right) dx =$$

0 (bornes paires) $\qquad\qquad$ 0

$$= \left[\cancel{-\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3/2} \cdot \frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10} - \cancel{\frac{x^4}{4}} \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{2\sqrt{25\sqrt{5} - 38}}{15}$$